2.10 Las aplicaciones de los logaritmos

Examinamos anteriormente la fórmula que relacionaba la cantidad de dinero y tiempo invertido a una tasa de interés anual del 6% calculado mensualmente. Debido a que el cálculo ocurre cada mes, la tasa de interés mensual es $\frac{0.06}{12} = 0.005$. Si comenzamos con \$100, la fórmula se vuelve

$$y = 100(1 + 0.005)^x = 100(1.005)^x$$

donde y es la cantidad total de dinero y x es la cantidad de meses que los \$100 son invertidos.

En el intento de encontrar cuánto tiempo le tomó al dinero duplicarse y desarrollar una fórmula simple basada en la duplicación, fue necesario encontrar el período de duplicación usando una gráfica.

Seleccionar puntos nos permitió obtener un período de duplicación de 139, lo cual es una aproximación muy buena. Sin embargo, si quisiéramos ahora encontrar cuánto tiempo le tomaría al dinero duplicarse al 9% anual calculado mensualmente, o, 10% por año calculado mensualmente, querría decir que cada vez tendríamos que dibujar una gráfica nueva. Los logaritmos nos permiten resolver este problema mucho más fácilmente.

Si se fuera a duplicar la cantidad de dinero, entonces, la cantidad será \$200, porque comenzamos con \$100. Por consiguiente, lo que tenemos que hacer es resolver la ecuación $200 = 100(1.005)^x$. Si dividimos ambos lados de la ecuación por 100, obtenemos $2 = (1.005)^x$. Estamos tratando de resolver para x, pero, el problema es que la variable x es un exponente.

Afortunadamente, la tercera propiedad de los logaritmos ($\log a^n = n \cdot \log a$, $a > 0$) trata con las potencias. Ésta nos permite cambiar una potencia en el producto de un número y un logaritmo. Esta técnica hace que todo sea más accesible para nosotros. Por consiguiente, tiene sentido que tengamos que introducir los logaritmos para la solución de la ecuación, $2 = (1.005)^x$.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Usar los logaritmos para resolver las ecuaciones exponenciales

Demostrar comprensión de la aplicación de los logaritmos cuando se miden los terremotos, la intensidad del sonido y la acidez

Aplicar la Regla del 72 para emitir juicio sobre las tasas de interés.

Tomemos el logaritmo de cada lado de la ecuación, porque, sabemos que el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el log de la base. Tomando el logaritmo de cada lado de la ecuación obtenemos

$$\log [2] = \log [(1.005)^x]$$

lo cuál es

$$\log 2 = x \cdot \log (1.005)$$

Resolviendo para x tenemos

$$x = \frac{\log 2}{\log(1.005)} \approx \frac{0.30103}{0.00217} \approx 138.7235$$

Esta contestación no es exacta, pero, es precisa a 4 espacios decimales. Si necesitáramos mayor precisión, usaríamos la calculadora para establecer más espacios decimales.

Sería igualmente fácil encontrar cuánto tiempo le toma al dinero aumentar por un factor de 10. Ahora la cantidad original habría aumentado a $1,000. En este caso, necesitamos resolver la ecuación $1000 = 100(1.005)^x$. Si dividimos ambos lados de la ecuación por 100, obtenemos $10 = (1.005)^x$. Tomando el logaritmo de cada lado de la ecuación, tenemos

$$\log [10] = \log [(1.005)^x]$$

lo cual se convierte en

$$\log 10 = x \cdot \log (1.005)$$

Resolviendo para x produce

$$x = \frac{\log 10}{\log(1.05)} = \frac{1}{0.00217} = 460.8295 \text{ meses}$$

lo cual es cerca de 38 años.

Usa logaritmos y la fórmula de interés compuesto $y = y_0(1 + i)^n$ para establecer cuánto tiempo le tomará al dinero duplicarse si el mismo es *calculado anualmente* a cada una de las siguientes tasas de interés anual:

(a) 4% **(b)** 10% **(c)** 8% **(d)** 9% **(e)** 12%

Este enfoque general puede ser usado para resolver las ecuaciones exponenciales de todo tipo y es una de las razones por las cuales los logaritmos son tan útiles.

Una de las reglas más fáciles y útiles para estimar cuánto tiempo le toma al dinero duplicarse se le conoce como la **Regla del 72**.

Regla del 72. Si tú quieres conocer cuánto tiempo le toma al dinero duplicarse, invertido a, digamos al 6% anual, divide la tasa de interés en por ciento por 72 y tendrás una respuesta aproximada. De manera que el 6% de interés anual *calculado anualmente*, el dinero se debe duplicar en cerca de $\frac{72}{6} = 12$ años. Esto es bastante cercano al valor calculado con precisión de

$$\frac{\log 2}{\log(1.06)} = \frac{0.3010}{0.0253} = 11.9 \text{ años}$$

1. **Usa la Regla del 72 para hacer un estimado de cuánto tiempo le tomará al dinero duplicarse a las tasas de interés de 8%, 9%, y 12% anual calculado anualmente.**
2. **Comparado a las respuestas que obtuviste anteriormente, ¿cuán precisa es la Regla del 72?**
3. **¿Por qué funciona tan bien?**

En el mundo hay muchos fenómenos que varían sobre ámbitos enormes. Un ejemplo son los terremotos. Cada día ocurren muchos terremotos alrededor del mundo, y aún, no escuchamos nada sobre ellos. Sin embargo, de vez en cuando, un terremoto fuerte ocasiona muchas muertes y destrucción masiva, debido a que es mucho más fuerte que los más débiles que ocurren frecuentemente.

Recordarás que la palabra *logaritmo* viene de la raíz griega *logos*, que significa “proporción” y *arithmos*, que significa “número”. Muchas escalas logarítmicas están basadas en proporciones numéricas.

La escala que ha sido desarrollada para medir los terremotos se le conoce como la escala Richter que lleva el nombre del sismólogo americano Charles Richter (1900-1985). La fuerza de un terremoto medida por la escala Richter está dada por la expresión $R = \log \frac{E}{I_0}$ donde E es la intensidad de las vibraciones del terremoto medido y I_0 es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar. Esta unidad estándar es medida por un instrumento conocido como un sismógrafo, el cual detecta las vibraciones en la corteza terrestre. En efecto, la escala Richter es una medida comparativa, más que una medida absoluta.

El día 14 de mayo de 1995, a las 18:28:25, el Servicio de Información Nacional de Terremotos de los Estados Unidos informó un terremoto en el sur de California que midió 3.0 en la escala Richter, pero, pocas personas se dieron cuenta de esto.

Anteriormente, ese mismo año, el día 17 de enero de 1995, un terremoto en Kobe, Japón, ocasionó sobre 2000 muertos y billones de dólares en daños. Éste midió 7.2 en la escala Richter. ¿Cuán más severo fue el terremoto de Kobe, que el del sur de California?

De acuerdo a la definición de la escala Richter

$$3.0 = \log\left(\frac{E_{California}}{I_0}\right)$$

y

$$7.2 = \log\left(\frac{E_{Kobe}}{I_0}\right)$$

Escribiendo nuevamente estas ecuaciones usando la propiedad de los logs que dice $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$, ahora tenemos dos ecuaciones nuevas

$$3.0 = \log E_{California} - \log I_0$$

y

$$7.2 = \log E_{Kobe} - \log I_0$$

Cuando restamos las dos ecuaciones tenemos

$7.2 - 3.0 = \log E_{Kobe} - \log I_0 - (\log E_{California} - \log I_0)$

$4.2 = \log E_{Kobe} - \log I_0 - \log E_{California} + \log I_0$

$4.2 = \log E_{Kobe} - \log E_{California}$

Usando ahora la misma propiedad de los logaritmos inversamente,

$$4.2 = \log\left(\frac{E_{Kobe}}{E_{California}}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{E_{Kobe}}{E_{California}} = 10^{4.2}$$

Usa tu calculadora para confirmar que $10^{4.2} = 15{,}849$. De hecho,

$$E_{Kobe} = 15{,}849\ E_{California}$$

El terremoto de Kobe tuvo una intensidad de 15,849 veces mayor que el terremoto de California. ¡Esta es la razón por la cual el terremoto de Kobe estuvo en las noticias nacionales!

Debido a que la escala Richter es una escala logarítmica, las diferencias pequeñas en los valores Richter (7.2 a 3.0, por ejemplo) se traducen en diferencias enormes en la intensidad de los terremotos.

Otras dos escalas logarítmicas usadas comúnmente son la *escala de decibelio* y la escala *pH*.

La escala de decibelio $D = 10 \log \frac{I}{I_R}$ donde I es la intensidad de la cantidad siendo medida, I_R es la intensidad del valor de referencia, y D es la cantidad de decibelios.

Encuentra la medida de los decibelios y por qué es una medida más importante hoy en día de lo que era hace muchos años. Escribe un párrafo explicando tus conclusiones.

La escala pH, $pH = -\log [H]$ donde $[H]$ denota la concentración de iones de hidrógeno.

Encuentra la medida del pH, y por qué ésta es una medida más importante hoy en día de lo que hubiera sido en el pasado. Nombra, por lo menos, dos situaciones es las cuáles se utiliza esta escala.

REFLEXIONA

Este capítulo ha repasado algo de tu trabajo anterior con los exponentes y te introdujo a los tópicos nuevos de crecimiento, declive y las funciones logarítmicas. Estas ideas nuevas tienen muchas aplicaciones en la ciencia y en el mundo que nos rodea. El interés compuesto, el crecimiento de los cultivos de bacterias, la descomposición radioactiva, la medición de los terremotos, la intensidad del sonido y el pH, todos dependen de la comprensión de las funciones de crecimiento, las funciones de declive y los logaritmos. Aprendiste también, distintas maneras en las cuáles se pueden usar los logaritmos para el análisis de los datos experimentales.

Conjunto de ejercicios: 2.10

1. **(a)** Resuelve la ecuación $2^x = 3$ usando logaritmos, y usando la calculadora.

Podrías usar un método de adivinar y de cotejo o las características de las tablas. Necesitas obtener una respuesta precisa a cuatro espacios decimales.

(b) De estos tres métodos, ¿cuál tú crees que es más fácil? Explica.

(c) Si el problema requiriera 8 dígitos de precisión, ¿haría esto más difícil la solución de la ecuación con logaritmos? ¿Qué tal los otros métodos?

2. Resuelve cada una de las siguientes para x:

(a) $2^{x-1} = 5$ **(b)** $e^{2x} = 3$ **(c)** $3e^{1-x} = 7$ **(d)** $5(3^{x+2}) - 1 = 14$

3. El texto de abajo nos provee la población estimada para el año 2005 y el ritmo de crecimiento anual para tres países diferentes.

Australia	20,090,437	1.3%
Chile	15,980,912	1.0%
Camerún	16,380,005	1.9%

Aprendiste anteriormente que un aumento continuo de los fenómenos puede ser modelado por la fórmula de crecimiento exponencial $y = y_0e^{kt}$ donde y_0 es la cantidad inicial (en este caso la población), t son los años de crecimiento y k es el ritmo de crecimiento. Asumiendo que las tendencias actuales continúen, predice cuándo las poblaciones de Camerún y Australia serán iguales.

4. La escala Richter es usada para medir la magnitud de un terremoto, usando la fórmula $R = \log\left(\frac{E}{I_0}\right)$ donde E es la intensidad de un terremoto siendo medido y I_0 es la intensidad de una unidad estándar de terremoto. Si llamamos I_0 1 unidad, entonces, la fórmula se reduce a $R = \log E$.

(a) Escribe esta fórmula de forma exponencial.

(b) El terremoto de San Francisco en el año 1989, registró una magnitud de 6.9 en la escala Richter. El número de víctimas fatales fue de 62. En el año 1906, en esta misma ciudad, ocurrió un terremoto que midió 8.3 en la escala Richter. La cantidad de víctimas fatales fue de 503. Calcula cuán más poderoso (intenso) fue el terremoto del año 1906, que el del año 1989.

(c) En el año 2003, hubo un terremoto en el sur de Irán que registró 6.6 en la escala Richter. El número de víctimas fatales fue una cifra trágica de 31,000. ¿Cuán menos poderoso fue este terremoto que el de San Francisco en el año 1989? ¿Por qué tú crees que la cantidad de víctimas fatales fue mucho más alta? ¿Qué factores podrían haber contribuido a la enorme diferencia en fatalidades?

(d) Supón que un terremoto en la ciudad de Los Angeles es la mitad de poderoso que el terremoto del año 2005 en Indonesia, el cuál midió 8.7 en la escala Richter. ¿Cuál hubiera sido la medida del terremoto de Los Angeles en la escala Richter?

5. La acidez del agua se mide con una unidad conocida como pH. Mientras mayor es el pH, menor es la acidez. Mientras menor es el pH, mayor es la acidez. El pH ideal para una piscina es 7.6. Si sube a 7.8, se le debe añadir un químico para bajar el pH. Si baja tanto como a 6.8, entonces, se requiere echarle un químico para subirlo.

(a) Escribe la fórmula $pH = -\log[H]$ en forma exponencial.

(b) Si el pH del agua es 7.0 (neutral), entonces, ¿cuál es la concentración de iones de hidrógeno en el agua?

(c) ¿Cuál es el pH de una muestra de lluvia ácida que tiene una concentración de iones de hidrógeno de 3×10^{-5}?

(d) Si el pH es 7.6, entonces, ¿cuál es la concentración de iones de hidrógeno?

(e) Si el pH es 6.8, entonces, ¿cuál es la concentración de iones de hidrógeno?

(f) ¿Cuánto más ácida es el agua con un pH = 6.8, que el agua con un pH = 7.6?

(g) Si la acidez ideal para el terreno donde se cosechan papas es de 5×10^{-8}, ¿cuál es el pH del terreno?

(h) Si la acidez del agua salada (concentración de iones de hidrógeno) es aproximadamente 10^{-9}, entonces, ¿cuál es el pH? ¿Quiere decir esto que el agua es ácida o no?

(i) Explica por qué es mucho más fácil trabajar con el pH que con los números que son típicamente usados para medir la concentración de iones de hidrógeno.

6. Un día tú llegas a la escuela para encontrar que la clase de natación ha sido cancelada ese día, porque el agua de la piscina no tiene balance químico. La lectura de pH es 7.2.

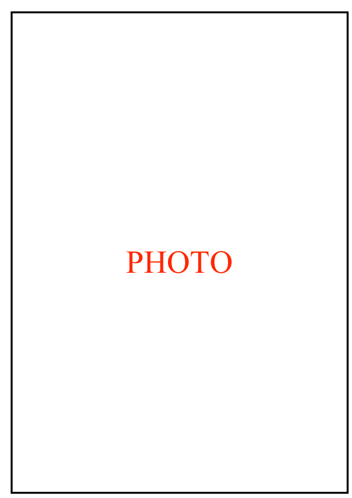
(a) ¿Cuántas veces es esto más ácido que lo ideal?

(b) ¿Por qué razón no querrías nadar en una piscina donde el agua es tan ácida?

7. Mientras los niños envejecen, el ritmo de crecimiento se reduce.

(a) ¿Cuándo los niños crecen más rápidamente? ¿Cuándo crecen más lentamente?

(b) Explica por qué el comportamiento de la función logarítmica hace posible que se pueda modelar el crecimiento de los humanos.



8. Datos experimentales han mostrado que el crecimiento en los niños entre las edades de 2-16 años puede ser aproximado por medio de la función $P = 18.6 \ln(A) + 37.1$ donde P es el por ciento de la estatura de un adulto y A es la edad del niño en años.

(a) Haz una gráfica de esta función.

(b) ¿Qué por ciento de su estatura de adulto tendrá un niño a la edad de 5 años?

(c) ¿Qué por ciento de su estatura de adulto tendrá un niño a la edad de 12 años?

(d) Si un niño tiene una estatura de 36 pulgadas cuando tiene 2 años, ¿cuán alta podríamos esperar que fuera su estatura al llegar a la adultez?

(e) ¿Qué factores ocasionarían que este modelo de crecimiento humano sea impreciso?

9. Datos experimentales han mostrado que el crecimiento en las niñas entre las edades de 5-15 años puede ser aproximado por la función $P = 31.11 \ln(A) + 16.27$ donde P es el por ciento de la estatura de un adulto y A es la edad de la niña en años.

(a) Haz una gráfica de esta función.

(b) ¿Por qué sería esta fórmula diferente a la fórmula usada para los niños?

(c) ¿Qué por ciento de su estatura de adulta tendrá una niña a la edad de 7 años?

(d) ¿Qué por ciento de su estatura de adulta tendrá una niña a la edad de 10 años?

(e) Si una niña tiene una estatura de 56 pulgadas cuando tiene 7 años, ¿cuán alta podríamos esperar que fuera su estatura al llegar a la adultez?

10. La intensidad del sonido es medida en la escala de decibelio (dB). La clasificación en decibelios para un sonido está dada por $D = 10 \log \left(\frac{I}{I_R}\right)$ donde I es la intensidad del sonido en Vatios/cm^2 y I_R es la intensidad más baja de un sonido que puede ser escuchado por los humanos. El valor de

$$I_{\mathrm{R}} \text{ es } \frac{10^{-16} Vatios}{cm^2}$$

(a) Escribe esta fórmula en su forma exponencial.

(b) Completa la siguiente gráfica.

Sonido	(I)	$\left(\frac{I}{I_R}\right)$	**dB = 10 log** $\left(\frac{I}{I_R}\right)$
Apenas audible			
Murmullo suave			
Conversación			
Tráfico pesado			
Estéreo a alto volumen			
Tren subterráneo			
Bocina de automóvil			
Aeroplano			
Dolor de oídos			

11. Usa la ecuación $D = 10 \log \left(\frac{I}{I_R}\right)$ donde $I_R = \frac{10^{-16}\text{Vatios}}{\text{cm}^2}$ para calcular la clasificación en decibelios de los sonidos para contestar cada una de las siguientes:

(a) ¿Cuán más alto es un sonido de 60 dB que un sonido de 40 dB?

(b) ¿Cuán más alto es un sonido de 75 dB que un sonido de 70 dB?

(c) El comité de seguridad de la escuela requiere que la intensidad de sonido en el gimnasio durante la clase de baile no exceda los 80 dB. Cuando comienza el baile, el sonido es medido utilizando un metro para el nivel del sonido a 90 dB. Los estudiantes a cargo de la clase no piensan que esto representa una gran diferencia en la intensidad del sonido. ¿Cuántas veces está más alta la música de lo que debería estar? ¿Está justificado el profesor a cargo de la clase al pedirle al DJ que baje el volumen de la música?

(d) En un concierto de rock el nivel de sonido da una medida de 110 dB. ¿Cuán más alto es esto que el nivel permitido en el baile (80 dB)?

(e) La Ley de Salud y Seguridad Ocupacional (OSHA, por sus siglas en inglés) declara que la exposición continua a niveles de sonido de 90 dB y más altos pueden llevar a la pérdida de la audición. ¿Cuán alto tú tocas tu equipo de música estereofónica? Si el nivel de tu equipo de música es 88 dB y lo subes a 91 dB, ¿cuán más intenso es el sonido?

(f) ¿Por qué el personal de tierra en un aeropuerto usa protección en los oídos?

12. La población mundial para varios años está dada en la tabla de abajo.

1650	550 (millones)
1750	725
1850	1175
1900	1600
1950	2564
1980	4478
2000	6085

(a) Dibuja una gráfica para representar estos datos. ¿Qué tipo de función aparenta ser esta gráfica?

(b) Estos datos pueden ser aproximados por la función $P = 0.0085e^{0.0065x}$, donde P es la población y x es el año. Haz una gráfica de esta función. ¿Aparenta esta gráfica tener la misma forma general que los datos?

(c) Usa la función para hacer un estimado de la población en el año 1965.

(d) Úsala para hacer un estimado de la población en el año 2010.

(e) ¿Cuál de estos estimados es más probable que sea fiable? ¿Por qué?

(f) ¿Qué significan los términos *interpolar* y *extrapolar*?

(g) En la parte (c), ¿estabas extrapolando o interpolando? ¿Por qué? ¿Cuál es el más arriesgado de los dos?

(h) ¿Qué suposiciones hacen que los modelos de población matemática sean tan inciertos?

PHOTO