2.3 Incremento exponencial

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Encontrar la cantidad de dinero invertido con una tasa de interés compuesto

Explicar la conexión entre el interés compuesto y el incremento exponencial

Interpretar y comparar las características de varias gráficas exponenciales.

En la primera sección de este capítulo, examinamos una función $y = 2^x - 1$ basándonos en el problema de llenar una tabla de ajedrez con granos de arroz. Dichos problemas, aunque son divertidos para explorar, no aparecen a menudo en la vida diaria. Consideremos una situación diferente esta vez, una que tiene que ver con dinero.

Anteriormente en **MATH** *Connections*, discutiste el interés compuesto y las funciones exponenciales. Utilizaremos estas ideas familiares como un punto de partida para discutir algunas aplicaciones del incremento exponencial.

Término a conocer: Cuando una función exponencial $f(x) = a^x$, donde $a > 1$, aumenta mientras la x aumenta, la función representa un **incremento exponencial**.

Revisemos primero las ideas básicas del interés compuesto.

Si tú depositas dinero en el banco, vas a recibir interés sobre este dinero. Típicamente, éste es calculado mensualmente. Esto quiere decir que después que transcurre el primer mes, tú obtendrás interés en la cantidad depositada originalmente, y luego, el próximo mes, obtendrás interés en la cantidad original, tanto como interés sobre este primer interés. Este es el principio del *interés compuesto*. Normalmente, cuando el banco cotiza el tipo de interés, éstos lo proveen en una base anual, junto con cuán a menudo éste es calculado. Por ejemplo, 6% anual calculado anualmente. Es importante recordar que 6% anual es 0.5% por mes (0.005 en forma decimal).

Término

La frase *per annum* viene del latín y quiere decir cada año.

PHOTO

Copia y completa la tabla en la Figura 2.5. Busca un patrón en ella.

Mes	**Expresión de la cantidad al comienzo del mes**	**Expresión de la cantidad al fin de mes**	**Cantidad**

Figura 2.5

1. **¿Aumenta el valor de tu dinero más rápido al principio?**
2. **¿Qué te parece al final de un período de 40 años?**
3. **¿Por cuánto ha aumentado tu dinero sobre un período de 40 años?**
4. **Piensa en una situación en la cual este tipo de planificación financiera a largo plazo sería apropiado.**

Cuando examinas tu gráfica, puedes ver que la cantidad de dinero que tienes depende de la cantidad de meses que has tenido el dinero en el banco.

Si guardas $100 en el banco a un 6% de interés anual calculado mensualmente, predice una fórmula para la cantidad (*y*) que tendrías después de una cantidad de meses (*x*).

La ecuación $y = 100(1.005)^x$ es un ejemplo de una forma de una fórmula de interés compuesto, y, como el ejemplo anterior, podría ser escrita como $f(x) = 100(1.005)^x$. Nota que hemos desarrollado la ecuación buscando un patrón en los pares ordenados (cantidad de meses, valor).

Término a conocer: La ecuación $y = p(1+ r)^x$, donde p es el principal, r es el tipo de interés por período calculado, y x es la cantidad de períodos calculados, es una fórmula de interés compuesto.

Usa tu calculadora para dibujar una gráfica de la función definida por esta ecuación. Posiciona WINDOW para permitir valores de *x* hasta 600 meses (50 años) y un valor *y* de $4,000.

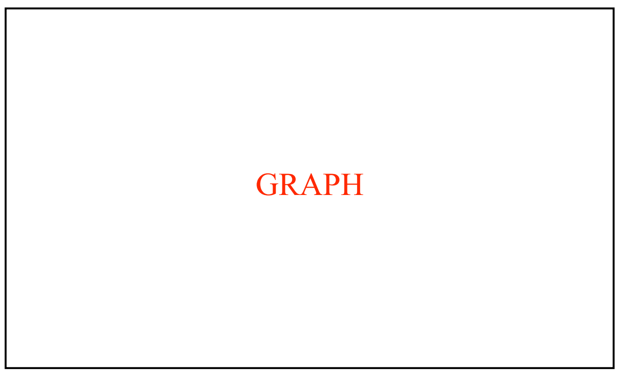

Figura 2.6

La gráfica en la Figura 2.6 muestra una curva que aumenta a paso continuo. Recuerda que una función exponencial, después de un punto particular, va a comenzar a aumentar rápidamente. Esta curva no parece estar aumentando rápidamente, sin embargo, conseguimos un cuadro diferente cuando cambiamos el tamaño de WINDOW para permitir los valores de *x* hasta 1200 meses (100 años) y dibujar la gráfica nuevamente.

GRAPH

Figura 2.7

Es más fácil ver la naturaleza exponencial de esta función en la Figura 2.7. Aunque durante los primeros años la gráfica aumenta lentamente, eventualmente aumenta de la misma manera que la función que representaba los granos de arroz aumentó. La única diferencia es que a esta curva le toma más tiempo tornarse extremadamente empinada.

1. **Examinemos el papel que este tipo de interés jugaría en todo esto. Recuerda que si la tasa fuera de 9% por año calculado mensualmente, sólo obtendrías 9 ÷ 12 = 0.75% por mes. De manera que el factor de multiplicación sería (1 + .0075), o (1.0075).**

   (a) Para cada una de las tasas de interés anuales 9%, 8%, y 12% (asumiendo que son calculadas mensualmente), predice una fórmula para la cantidad de dinero *y* versus la cantidad de meses *x*, asumiendo que comienzas con $100 como antes.

   (b) Sin borrar la gráfica de 6%, usa tu calculadora para hacer una gráfica de cada una de las funciones representando las tasas de 9%, 8%, y 12%, con el mismo tamaño de WINDOW como antes. ¿Qué notas?

PHOTO

GRAPH

Figura 2.8

En la Figura 2.8 se muestran las cuatro curvas como aparecerían en tu computadora. Nota que al principio hay una pequeña diferencia entre las cantidades de dinero acumulado, pero, mientras más tiempo se invierte el dinero, mayor se vuelve la diferencia en los rendimientos.

1. **Dibuja esta figura en tu cuaderno de notas y rotula las cuatro curvas con la tasa de interés apropiado.**
2. **Es fácil convencerte que esta diferencia es actualmente real. Calcula $100(1.0025)^{720}$ (3% durante 60 años) y $100(1.01)^{720}$ (12% durante 60 años).**
3. **Busca la proporción de las cantidades.**
4. **Si la tasa de interés se duplica, ¿se duplicará la cantidad de dinero también? Explica.**
5. **¿Por qué factor ésta ha aumentado?**
6. **¿Por qué la cantidad de dinero no se duplica cuando la tasa de interés se duplica?**
7. **¿Cuál sería la fórmula para el interés compuesto si la tasa de interés fuera 1% por período de interés?**

Conjunto de ejercicios: 2.3

1. Dos bancos ofrecen diferentes tasas de interés garantizados para los clientes que ahorren su dinero en cuentas de ahorro regulares.

BANCO A. 5.75% tasa de interés anual calculada dos veces al año

BANCO B. 5% tasa de interés anual calculada mensualmente

(a) Has ganado $500 este verano, los cuáles quieres ahorrar para comprar un automóvil en los próximos 5 años. Predice cuál plan de ahorros, A o B, te va a generar más dinero. Calcula la cantidad total en tu cuenta de ahorros, para un período de 5 años en cada caso. ¿Fue tu predicción correcta?

(b) ¿Y qué tal si tu abuelo depositó $500 en una cuenta de ahorros cuando tú naciste, y dijo que lo podrías usar para comprar un automóvil cuando tuvieras 21 años? ¿Cuánto dinero habría en tu cuenta de ahorros si este fuera invertido en el BANCO A?

(c) ¿Y qué tal si tu abuelo depositó $5,000 en el BANCO A? ¿Cuál sería el valor de esta cantidad en 21 años?

(d) Explica lo que lo tú piensas que significa cuando se dice que: "El rico se hace más rico".

2. Melissa firma un contrato por 10 años con una liga de voleibol playero con un salario inicial de $75,000 y un aumento garantizado de $8,000 por año. Yolanda firma un contrato de 10 años comenzando con un salario de $50,000 el cual garantiza un aumento de 12% por año. ¿Tendrá Yolanda en algún momento un salario mayor al de Melissa? ¿Si es así, cuándo? ¿Si no es así, por qué no?

PHOTO

3. Un cuento histórico común afirma que en el año 1626 un grupo de exploradores holandeses compraron la isla de Manhattan a los indios americanos por la cantidad de $24 en cuentas y baratijas. Si esa cantidad de $24 hubiera sido invertida en una cuenta de ahorros que pagara 6% de interés calculado anualmente, ¿cuál sería el valor de este dinero al día de hoy? ¿Quién tú crees que salió ganando con este acuerdo? Explica.