2.5 Declive exponencial

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Reconocer la diferencia entre el crecimiento y declive exponencial de las curvas

Reconocer la diferencia entre el crecimiento y declive de las ecuaciones exponenciales

Evaluar cantidades basada en ambas funciones de crecimiento y declive

Relacionar la ecuación de depreciación a una basada en la división en dos.

PHOTO

En las dos secciones anteriores los ejemplos envolvían el concepto de crecimiento. Sin embargo, no todos los ejemplos de funciones exponenciales están basados en esta noción de aumento explosivo o crecimiento. Para considerar una posibilidad diferente para el crecimiento, podemos considerar el concepto de *depreciación*. Algunas personas se sorprenden de descubrir que tan pronto compran un automóvil nuevo, éste deprecia en valor, y tiene un valor menor que cuando lo compraron.

Los negocios usan el término de *depreciación* de una manera más formal cuando tratan de calcular el valor de su compañía. Algunos de sus activos —computadoras, copiadoras, sistemas de aire acondicionado— depreciarán y su valor será menor al envejecer. Este hecho le permite al negocio tener una idea más exacta de su valor neto.

Piensa en algunas otras cosas que un negocio podría poseer que podrían disminuir su valor a través del tiempo.

Por esta razón, los negocios utilizan un factor de depreciación cuando calculan el valor de sus activos para propósitos de impuestos. Algunos artículos se desgastan a ritmos diferentes, así que las regulaciones típicas de impuestos especifican el por ciento de depreciación que puede ser reclamado para distintos artículos.

Digamos que comenzaste un pequeño negocio y compraste una camioneta nueva para hacer entregas. La camioneta tuvo un costo de $25,000 y de acuerdo a la ley de impuestos, te es permitido depreciar su valor por 15% por año. Esto siginifica que después de la depreciación del primer año, el valor de la camioneta será de solamente 85% de su costo original, o $21,250. Esto es un ejemplo de un *proceso repetitivo*. Y mientras completas la Figura 2.11, notarás que cada entrada a la tabla es calculada de la anterior. Una tabla como esta, es una manera práctica de organizar tu pensamiento y tu calculadora te permitirá hacer este trabajo eficientemente.

Copia la tabla en la Figura 2.11. Anota los valores apropiados en la tabla en tu cuaderno de notas.

Edad del vehículo	Expresión para el valor	Valor

Figura 2.11

1. **¿Disminuye el valor de la camioneta la misma cantidad cada año?**
2. **¿Cuándo es mayor la caída en valor?**
3. **¿Cuándo es menor la caída en valor?**
4. **¿No tendrá ningún valor la camioneta en algún momento, de acuerdo a este modelo? ¿Qué tal en la vida real? Explica.**
5. **¿Tendrá la camioneta en algún momento un valor negativo, de acuerdo a este modelo? ¿ Qué tal en la vida real? Explica.**
6. **Usa la tabla para desarrollar una fórmula que pueda relacionar la edad de la camioneta en años (x) con su valor (y).**

¿Cómo esta fórmula compara con la fórmula del interés compuesto $y = (1 + i)^x$ que desarrollamos previamente?

La fórmula

$$y = 25{,}000(1 - .15)^x \text{ ó } y = 25{,}000(0.85)^x$$

predecirá el valor de la camioneta después de x años de depreciación a 15% por año.

Usa tu calculadora para dibujar una gráfica de esta función. Posiciona WINDOW a $0 \le x \le 25$ y $0 \le y \le 27{,}000$.

La gráfica en la Figura 2.12 es muy diferente de los ejemplos de crecimiento exponencial que vimos previamente. De todas formas, la función es una función exponencial porque la variable independiente es un exponente. En vez de ilustrar el *crecimiento exponencial*, esta curva representa *declive exponencial*.

GRAPH

Figura 2.12

¿Cómo es la curva igual a, o diferente de, las curvas de crecimiento exponecial que tramamos antes?

Una de las diferencias entre esta curva y una curva de crecimiento es que las cosas trabajan de una forma recíproca. Aquí, la disminución más grande ocurre al principio, mientras que el aumento más grande ocurre más tarde con el crecimiento. En el caso del declive, valores posteriores son muy pequeños. Sabemos que en algún momento la camioneta no tendrá ningún valor, pero, la curva matemática, realmente, nunca llega a cero. La curva sí se acerca al extremo positivo del eje de x y se acerca extremadamente al cero. Así que tiene un *valor limitado* de cero. Recuerda que la línea a la que la curva se acerca se conoce como una *asíntota*. La idea de valores limitados y los límites es fundamental para el estudio del cálculo y volveremos a esto en una sección posterior.

En ejemplos previos de crecimiento exponencial, fuimos capaces de cambiar la forma de la fórmula del interés compuesto a una fórmula nueva basada en la duplicación. En este caso podemos hacer lo mismo, excepto, que la nueva fórmula estará basada en la división en dos. Para que sea más fácil examinar la función de depreciación con más detalles, en la Figura 2.13 se muestra una gráfica más exacta.

Término a conocer: Cuando una función exponencial $f(x) = a^x$, donde $a < 1$, disminuye mientras x aumenta, la función representa un **declive exponencial**.

Valor de la camioneta ($1,000)

GRAPH

Edad de la camioneta en años

Figura 2.13

1. **Usa esta gráfica o la función TRACE en tu calculadora para establecer cuánto tiempo le tomaría al valor de la camioneta depreciar a la mitad de su valor original.**
2. **Si el valor de la camioneta se reduce a la mitad 3 veces, entonces, ¿cuál sería su valor?**
3. **Si se redujera a la mitad 5 veces, ¿cuál sería su valor?**
4. **Si se redujera a la mitad dos veces, ¿cuál sería su valor?**
5. **Si se redujera a la mitad *x* cantidad de veces, ¿cuál sería su valor?**

PHOTO

Nuevamente, podemos obtener una fórmula en términos de la cantidad de veces que el valor y se ha reducido a la mitad n, en este caso $y = 25{,}000\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ahora tenemos que relacionar la cantidad de veces que el valor se ha reducido con el número de años. Copia la gráfica de la Figura 2.14 en tu cuaderno de notas y úsalo para ayudarte a contestar esta pregunta.

Tiempo (en años) (*x*)	**Cantidad de períodos de división en dos**

Figura 2.14

Si la cantidad de períodos de la división en dos es $\frac{x}{4.25}$ la fórmula se convertirá en $y = 25{,}000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4.25}}$. A menudo el término *media vida* es usado para describir el tiempo que le toma a algo dividirse a la mitad, en vez de la frase *período de división en dos*, pero, el concepto es el mismo.

Para verificar que esta fórmula nueva, basada en la división en dos, es igual que la fórmula original de depreciación, calculemos el valor de la camioneta después de 10 años.

Usando la fórmula de depreciación: $y = 25{,}000(0.85)^{10} = \$4{,}921.86$

Usando la fórmula de la división en dos: $y = 25{,}000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{4.25}} = \$4{,}893.66$

¿Por qué habría una diferencia entre las dos?

1. **Calcula el valor de la camioneta después de 10 años usando la fórmula de** la división en dos**, pero, esta vez, usa 4.265 como el** período de división en dos**.**
2. **Explica tu resultado.**

Nota que esta fórmula hace uso de las propiedades de los exponentes negativos. Recuerda que $2^{-1} = \frac{1}{2}$ de manera que podemos escribir la fórmula como

$$y = 25{,}000(2^{-1})^{\frac{x}{4.25}} \text{ ó } y = 25{,}000(2)^{-\frac{x}{4.25}}$$

Datos a conocer: La función exponencial $f(x) = a^x$, donde $a > 1$ representa el *crecimiento exponencial*. La función exponencial $f(x) = a^x$, donde $0 < a < 1$ representa el *declive exponencial*.

Conjunto de ejercicios: 2.5

1. Kareem es un entusiasta de los automóviles. Él es dueño de un Mercedes nuevo, cuyo valor es de $60,000, y un Corvette clásico, con un valor de $30,000. El Mercedes nuevo va a depreciar al 10% por año, pero, como el Corvette es un artículo de colección, éste aumentará su valor en 5% por año.

(a) ¿Cuánto tiempo le tomará al valor del Mercedes reducirse a la mitad?

(b) ¿Cuánto tiempo le tomará al Corvette duplicar su valor?

(c) Establece una fórmula para el valor del Mercedes después de t años.

(d) Establece una fórmula para el valor del Corvette después de t años.

(e) ¿Tendrán alguna vez los dos automóviles el mismo valor? Si es así, ¿cuándo? Y si no es así, explica por qué no.

2. C-14 es un isótopo radioactivo de carbono que existe en un porcentaje fijo en la naturaleza. El tejido viviente, el cuál tiene su contenido de carbono renovado constantemente a través de los procesos metabólicos normales, también contiene este mismo porcentaje de C-14. Sin embargo, cuando ocurre la muerte, el tejido no toma carbono nuevo y el C-14 se descompone con una media vida igual a aproximadamente 5,700 años. La fracción de C-14 que queda después de t años de descomposición está dada por $N = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$.

(a) Si el contenido medido de C-14 de un animal fósil es 0.05 de la concentración de un organismo viviente, ¿aproximadamente, cuánto tiempo hace que murió el animal?

PHOTO

(b) Si el contenido medido de C-14 de un animal fósil es $\frac{1}{40}$ de concentración en un organismo vivo, ¿aproximadamente, cuánto tiempo hace que murió el animal?

(c) Algunos exploradores encontraron un documento escrito en pergaminos hechos con hojas de plantas. Ellos piensan que se pueden haber tropezado con la versión original de la Biblia, la cuál tendría un valor de millones de dólares. La concentración medida de C-14 en el papel es de 0.72 de la concentración encontrada en plantas vivientes. ¿Podría ser este documento lo que ellos piensan que es? Justifica tu respuesta.

(d) ¿Por qué no puedes usar el carbón de datación en las rocas?

3. Los geólogos saben que las rocas que contienen petróleo se formaron después que otras rocas antiguas. Una de las maneras que ellos deciden si se puede encontrar petróleo en un área específica, es buscando la edad de la roca en esa área. Un isótopo radioactivo de potasio, potasio-40, se descompone en argón-40. La edad de las rocas puede ser establecida examinando la proporción de potasio-40 a argón-40. La proporción de argón (A) a potasio (K) está dada por

$$\frac{A}{K} = \frac{2^{\frac{t}{h}} - 1}{8.33}$$

donde h es la media vida del potasio-40 (cerca de 1.26×10^9 años) y t es el tiempo transcurrido.

(a) Encuentra la proporción de A a K si el tiempo transcurrido es igual a 0. Explica.

(b) Si una muestra de roca tiene aproximadamente 2 billones de años, ¿cuál será la proporción de $\frac{A}{K}$?

PHOTO