2.6 Los modelos de crecimiento continuo

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Comparar los modelos de crecimiento continuo y discreto

Explicar el concepto del valor limitado

Describir el papel jugado por la cantidad *e* en los modelos exponenciales de crecimiento y declive.

Un anuncio para un banco afirma que calcula su interés, no mensualmente, ni semanalmente, sino continuamente. ¿Es esto posible? ¿Haría esto alguna diferencia?

¿Qué harías para averiguar si hay alguna diferencia entre calcular el interés semanalmente y calcularlo continuamente cada fracción de un segundo?

Una manera de investigar esta afirmación sería usando la fórmula del interés compuesto con algún tipo de interés fijo y entonces, buscar si (o cómo) la frecuencia de cálculo hace una diferencia. Recuerda que para un tipo de interés de 12% por año la cantidad de dinero que tú tienes (asumiendo que tú comienzas con \$100) está dada por $y = 100(1 + .12)^x = 100(1.12)^x$ donde x es la cantidad de años y el cálculo es anual. Asume que el dinero es invertido durante un año.

Usa tu calculadora para ayudarte a completar la Figura 2.15. Escribe todos los dígitos en tu calculadora en vez de redondearlos al centavo más cercano.

Índice anual	Calculado	Índice por período de cálculo	Expresión para la cantidad	Cantidad
	Anual			
	Mensual			
	Semanal			
	Diario			
	Por hora			
	Cada minuto			
	Cada segundo			
	Continuamente			

Figura 2.15

1. **¿Afecta la frecuencia con que se calcula el interés cuánto dinero tu acumulas? Explica.**
2. **¿Aumenta o disminuye el ingreso de tu interés si éste se calcula más frecuentemente? Explica.**
3. **¿Continúa ocurriendo el aumento o disminución para períodos del cálculo cada vez más cortos? Explica.**
4. **¿Podría el cálculo continuo tener una diferencia práctica versus calcular el interés diariamente? ¿Por qué?**

El fenómeno que has notado aquí es un ejemplo de una cantidad acercándose al *valor limitado*. Tus valores podrían haber sido algo diferentes de la tabla de abajo debido a diferencias en la precisión de la calculadora, pero, examinémosla para ilustrar el punto:

Mensualmente
Semanalmente
Diariamente
Cada hora
Cada minuto
Cada segundo

La diferencia entre dos valores consecutivos es tornarse más y más pequeños todo el tiempo. Cuando ocurre esta situación, es posible, algunas veces, que la expresión bajo consideración tiene un valor limitado que no puede ser excedido nunca, no importa cuán grande llegue a ser el valor de la variable dependiente (en este caso, la frecuencia del cálculo). Increíblemente, los matemáticos pueden calcular el valor limitado de esta expresión, aún si ellos asumen que el cálculo se lleva a cabo a menudo sobre intervalos infinitamente pequeños de tiempo infinito.

El cálculo de este límite hace uso de la tecla de e^x en tu calculadora. Los matemáticos han podido mostrar que para encontrar cuánto dinero tú tendrás después de un año, asumiendo un cálculo continuo de \$100 a una tasa de interés de 12% al año, tú calculas

$$A = 100 \times e^{0.12} \times 1 = 100 \times e^{0.12}$$

1. **Evalúa en tu calculadora la expresión $100e^{0.12}$.**

2. **¿Es igual al valor que tú calculaste en la Figura 2.15?**

En general, si la cantidad inicial aumenta a un ritmo de k% por año calculado continuamente y t es la cantidad de años, la cantidad A después de t años está dada por $A = \textit{Cantidad inicial} \times e^{kt}$. Y, en vez de ser sólo una curiosidad, muchas cosas en el mundo real trabajan de una manera casi continua.

Considera un cultivo de bacterias. Hay billones de bacterias creciendo y dividiéndose, de manera que en cualquier momento específico, está ocurriendo siempre algún tipo de crecimiento. Se asume también, que las poblaciones de humanos aumentan de una manera continua. La descomposición radioactiva es otro ejemplo de una situación continua. Hay también muchos átomos en una muestra de mineral de uranio, por ejemplo, que aún cuando se están descomponiendo al azar, en un momento específico siempre está ocurriendo alguna descomposición a un estado no radioactivo.

1. **La población de Grecia es de aproximadamente 10.67 millones de personas. El ritmo de crecimiento de la población es de 0.2% por año. Asumiendo un crecimiento continuo,**

   (a) Escribe una fórmula para la población de Grecia después de *t* años.

   (b) Pronostica la población de aquí a 20 años si continúan las tendencias actuales.

Hablando técnicamente, puede ser posible que el proceso natural bajo estudio no sea continuo, pero, ocurra tan rápidamente que aparente ser continuo. Un modelo matemático que asume un cálculo continuo es más exacto para estos tipos de procesos naturales que uno en el cuál se asume que todo ocurre mensualmente. Y, aunque las diferencias son pequeñas cuando el cálculo es frecuente, pueden ser importantes cuando se les compara, por ejemplo, con el cálculo anual. Lo que se necesita hacer es examinar cómo las fórmulas que han sido derivadas para crecimiento exponencial y declive (en el cual períodos finitos de tiempo ocurren entre el cálculo) pueden ser cambiados para acomodar cálculo continuo.

Pero, ¿cómo se le ocurriría a alguien dicha fórmula? Un buen lugar para comenzar es con la fórmula para la cantidad de dinero *y,* después de un año, si la tasa de interés es 100% por añocalculada anualmente (asumiendo que comienzas con $1), $y = (1 + 1)^1$. Ahora, si decidimos calcularel interés más a menudo, digamos a veces por año, la fórmula se vuelve $y = \left(1+\frac{1}{a}\right)^{1\cdot a} = \left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$. En otras palabras, obtenemos menos interés, pero, lo obtenemos más a menudo. La pregunta matemática es, ¿qué ocurre si dejamos que a se convierta infinitamente grande?

Esta idea de examinar lo que sucede mientras algo se torna muy grande, es lo suficientemente importante en las matemáticas como para que se le de su propio símbolo. Cuando tú ves los símbolos $\lim\limits_{a\to\infty}$, se lee como "el límite mientras a se acerca al infinito". Este simbolismo nos pide investigar qué le sucede a las expresiones mientras el valor de la variable a se vuelve más y más grande. Usando esta notación podemos escribir la cantidad bajo estudio aquí como $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$.

Usa tu calculadora para completar la Figura 2.16.

Valor de *a*	**Valor de** $\frac{1}{a}$	**Valor de la expresión** $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$

Figura 2.16

La calculadora nos da una sospecha fuerte sobre la expresión $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$. Ésta aparenta ciertamente estar acercándose a un valor. Una computadora que usa técnicas especiales para generar más lugares decimales con exactitud que tu calculadora, produce los valores en la Figura 2.17. Como puedes ver, mientras más grande el valor de a que usamos, se necesitarán más espacios decimales antes de ver algún cambio. Los matemáticos han probado que esta expresión tiene un valor limitado. La Figura 2.17 sugiere fuertemente que existe un límite, pero, en realidad, no lo prueba.

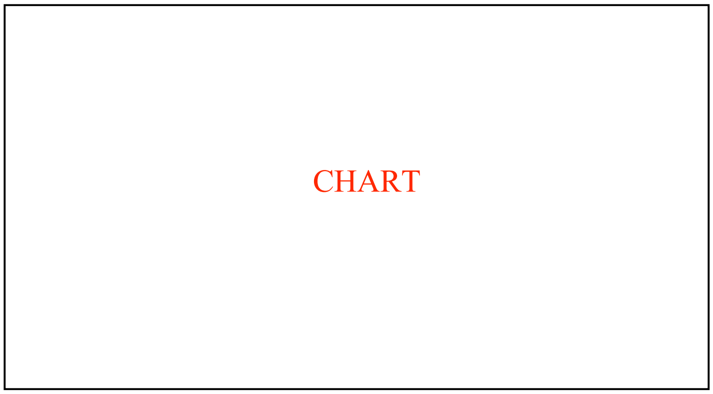
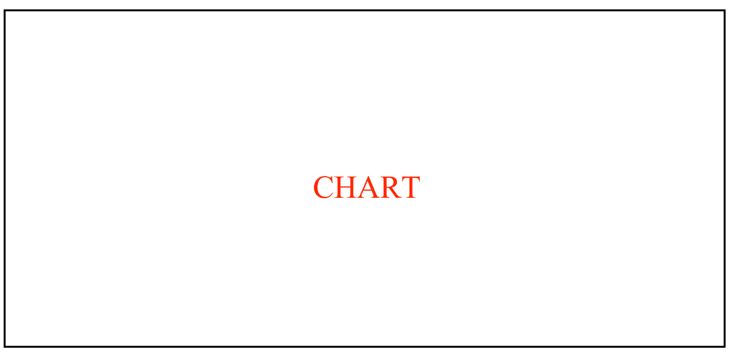


Figura 2.17

El límite mostrado en esta ilustración es muy importante en las matemáticas, tanto, que se le ha dado su propio símbolo, la letra *e*. Éste es un número irracional, esto es, un decimal que no se repite y no termina. Al igual que el numero π, es también un decimal que no puede ser expresado de la forma $\frac{a}{b}$ donde *a* y *b* son íntegros. Su valor aproximado se puede encontrar directamente en tu calculadora evaluando e^1. Tú recuerdas probablemente, haberlo visto antes cuando estudiaste el crecimiento exponencial anteriormente en **MATH** *Connections*. El valor de *e* puede ser calculado a un grado muy alto de precisión usando métodos especiales.



¿Puedes encontrar cualesquiera patrones en los dígitos del número *e*? Explica.

Ahora que tenemos este símbolo, la fórmula con que estábamos trabajando se puede simplificar. Debido a que el valor limitado de una expresión que se parece a $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$ es el número *e*, podemos escribir de nuevo nuestra fórmula para la cantidad de dinero después de un año al 100% del interés calculado continuamente como $y = e^1$.

Recuerda que esta fórmula, $y = e^1$, está basada en la idea del crecimiento continuo o declive y debe ser usada solamente cuando la realidad física de la situación hace de esta suposición una razonable.

Ahora, recuerda que estamos asumiendo que comenzamos con $1. Si en vez de esa cantidad, hubiéramos comenzado con un valor inicial, de, digamos, y_0, entonces, la fórmula final, que nos dice cuánto hay después de t unidades de tiempo, es $y = y_0e^{kt}$, y esta es, exactamente, la fórmula que fue utilizada anteriormente para verificar los valores de la Figura 2.15.

> **Dato a conocer:** Un fenómeno en aumento continuo puede ser modelado por medio de la fórmula de crecimiento exponencial $y = y_0e^{kt}$ donde t es el tiempo de crecimiento transcurrido, k es el ritmo de crecimiento y y_0 es el valor inicial.
>
> **Si esta fórmula $y = y_0e^{kt}$ fuera a ser utilizada para describir la descomposición radioactiva, ¿cómo crees que esto podría cambiar?**

Este número e, el cual ha sido desarrollado por el intento de hacer modelos de los procesos que ocurren naturalmente, aparecerá de nuevo en nuestros estudios.

Conjunto de ejercicios: 2.6

1. La tabla de abajo nos proporciona la población estimada para el año 2005 y el ritmo de crecimiento anual para tres países distintos.

País	Población	Ritmo de crecimiento
Australia	20,090,437	1.3%
Chile	15,980,912	1.0%
Camerún	16,380,005	1.9%

PHOTO

(a) En esta sección has visto que algunos fenómenos crecientes pueden ser modelados por medio de la fórmula de crecimiento exponencial $y = y_0e^{kt}$ donde y_0 es la cantidad inicial (en este caso, la población) y k es el ritmo de crecimiento anual. Asumiendo que las tendencias presentes continúan, busca cuándo la población de Camerún va a ser igual a la población de Australia, y cuándo ésta va a ser igual a la población de Chile.

(b) Localiza en un mapa a Australia, Camerún y Chile. ¿Cuál es el lenguaje nacional de cada país?

2. La población de los Estados Unidos era de aproximadamente 296 millones de personas en el año 2005 y se estima que crezca a un ritmo de 0.9% por año.

(a) Establece una fórmula para la población de los Estados Unidos después de t años.

(b) Calcula la población para el año 2020.

(c) Si la población estuviera disminuyendo a un ritmo de 1% por año en vez de creciendo, escribe una fórmula para la población después de t años.

(d) En este caso, ¿cuál sería la población para el año 2020?

3. El agua potable es desinfectada al añadirle cloro. Mientras más tiempo la bacteria está en contacto con el cloro, menos posibilidades tienen de sobrevivir. La fórmula $\frac{\textit{Bacteria después del tratamiento}}{\textit{Bacteria antes del tratamiento}} = e^{-18.4t}$ relaciona la longitud de tiempo t (en horas) que el agua es tratada y la proporción de bacterias con vida después del tratamiento con cloro.

(a) ¿Cuánto tiempo tomará para matar el 99% de las bacterias?

(b) ¿Qué fracción de las bacterias quedará después de cinco minutos de tratamiento?

PHOTO