

## 2.7 Los inversos de las funciones exponenciales

### Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Reconocer el inverso de una función gráficamente y por su ecuación

Establecer la ecuación inversa para una función dada

Relacionar el inverso de una función exponencial a su función logarítmica y hacer gráficas de ellas

Usar tu calculadora para encontrar el logaritmo de cualquier número positivo

Estimar el logaritmo de cualquier número positivo

Relacionar los logaritmos a los exponentes.

Hemos aprendido, como sociedad, que si es útil ser capaces de hacer ciertas cosas, es además útil poder deshacer los resultados de muchas de las cosas que hacemos. Nos ponemos un abrigo pesado para salir afuera en el invierno, pero, también nos gusta ser capaces de quitárnoslo cuando entramos. Nos da un sentido de seguridad ser capaces de asegurar una puerta, pero, también necesitamos ser capaces de abrirla.

Al menos, las matemáticas no son diferentes en este sentido, — cuando hacemos algo es útil saber que lo podemos deshacer. Antes en **MATH Connections** fuiste introducido a la idea del inverso de una función. Por ejemplo, si tenemos una función  $f(x) = 2x + 3$ , esta puede ser puesta en palabras como “multiplicar  $x$  por 2 y sumarle 3”. Para deshacer esta operación necesitaríamos deshacer cada una de las operaciones aritméticas en el orden inverso.

Entonces, en términos matemáticos, el inverso de  $f(x) = 2x + 3$ , la cual es denotada  $f^{-1}(x)$ , es definida por la ecuación  $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ . Para verificar que esto tiene sentido, examinemos qué la función le hace al valor de  $x$  y qué hace el inverso.  $f(3) = 2(3) + 3 = 9$ . Esto significa que la función  $f$  asocia el valor  $x$  3 con la función del valor 9. Esperaríamos que la función inversa  $f^{-1}$  asocie el número 9 con el número 3, y se puede mostrar que sí lo hace.

$$f^{-1}(9) = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$



**Escoge cualquiera tres valores para  $x$  y encuentra el valor asociado  $f(x) = 2x + 3$ .**

**Verifica que la función inversa  $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$  puede asociar cada uno de estos valores funcionales con los valores originales para  $x$ .**

Recuerda que también aprendimos que hay una manera fácil de buscar el inverso de una función. En nuestro caso encontramos que el inverso de la función  $f(x) = 2x + 3$  es  $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ . Podríamos decir también que la función original es definida por  $y = 2x + 3$  y su función inversa es definida por  $y = \frac{x-3}{2}$ .

Sin embargo, la ecuación que define el inverso puede ser reordenada para que lea  $2y = x - 3$  ó  $x = 2y + 3$ . Si tú comparas la ecuación de la función original  $y = 2x + 3$  y la ecuación de su inverso  $x = 2y + 3$ , notarás que las posiciones de la  $x$  y la  $y$  están intercambiadas, un resultado que estableciste en el Capítulo 1.

Usemos estas ideas para buscar el inverso de una función exponencial. Si tuviéramos la función exponencial definida por la ecuación  $y = 2^x$ , entonces, la ecuación que define el inverso sería  $x = 2^y$ .

**Copia y completa la tabla de valores de abajo. Entonces, dibuja y rotula las gráficas de cada una de estas funciones.**



(a)  $y = 2^x$

$x$									
$y$									

(b)  $x = 2^y$

$x$									
$y$									

(c) **Dibuja la gráfica de la función definida por  $y = x$ .**

1. **¿Cómo están relacionadas las dos gráficas?**
2. **¿Qué papel juega en esto  $y = x$ ?**
3. **Explica cómo tú podrías dibujar el inverso de  $y = 2^x$  sin trazar ningunos puntos.**
4. **¿Podrías haber comenzado con el inverso  $x = 2^y$  y producir  $y = 2^x$ ? Explica.**
5. **La Figura 2.18 es una gráfica exacta de  $y = 2^x$ ,  $x = 2^y$ , y  $y = x$ . Coloca un pedazo de papel sobre la ilustración y cuidadosamente dibuja el eje de  $x$ , el eje de  $y$ , *una* (pero, no ambas) de las curvas, y la línea  $y = x$ . Rotula la curva que dibujaste. Dobra el papel a lo largo de la línea  $y = x$  y traza la curva que dibujaste. Ahora, desdobra el papel y examina la línea trazada de manera que todo esté en el mismo lado del papel. Rotula la otra curva. ¿Se parece ésta a la gráfica de la Figura 2.18? Explica.**

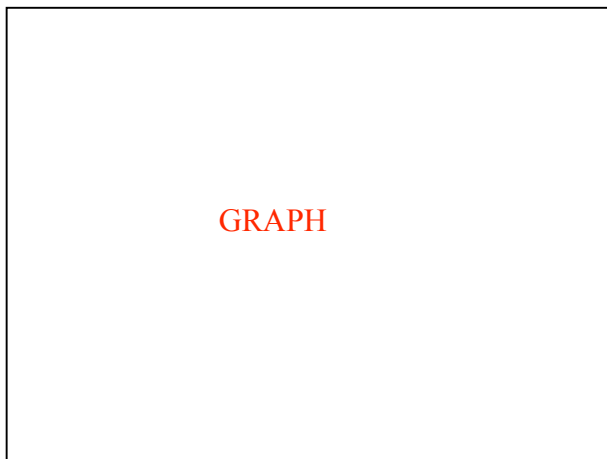


Figura 2.18

Recuerda que en el capítulo 1, la gráfica de la función inversa sería un reflejo exacto de la gráfica de la función, usando la línea  $y = x$  como el espejo. Ahora sabemos a lo que se parece el inverso de esta función exponencial, pero, necesitamos también ser capaces de escribir una ecuación que la describa. La ecuación original era  $y = 2^x$  ó  $f(x) = 2^x$ , y sabemos que la relación inversa tiene que satisfacer la ecuación  $x = 2^y$ . Desafortunadamente, no podemos escribir esta expresión en la forma de  $y = [\text{algo}]$  ó  $f^{-1}(x) = [\text{algo}]$  para hacerla consistente con la definición para la función original. Es útil algunas veces conocer lo que estás tratando de decir con palabras antes de preocuparte sobre una manera matemática de escribir el resultado.



Recuerda que para  $y = 2^x$ ,  $x$  es la variable independiente que es usada para generar los valores correspondientes de  $y$ , 2 es la base y  $x$  es el exponente.

Ahora, tenemos que para  $x = 2^y$ , donde  $y$  es la variable independiente que es usada para generar los valores correspondientes de  $x$ ,  $y$  es el exponente. En las matemáticas, hay una palabra que podemos usar en vez de la palabra *exponente* (aunque significa lo mismo), y esta es la palabra *logaritmo*, frecuentemente abreviada como *log*.

¿Cómo podemos escribir la expresión  $x = 2^y$  de manera que sea escrita en la forma de  $y = [\text{alguna función}]$  de  $x$ ? La oración *y es el exponente de la base 2, que es igual al valor de x*, puede ser escrita como  $y = \log_2 x$ .

Esto se lee como “y es igual al log en la base 2 de x”. Ten en mente que la frase *log en la base 2* es igual que decir “el exponente en la base 2”.

Ahora tenemos el inverso de la función  $y = 2^x$ ; esta es  $y = \log_2 x$ . En función de notación escribiríamos  $f(x) = 2^x$  y  $f^{-1}(x) = \log_2 x$ .

Las ecuaciones que envuelven exponentes pueden ser escritas en *forma exponencial* o *forma logarítmica* y tienen el mismo significado. Por ejemplo,  $8 = 2^3$  está en forma exponencial y  $3 = \log_2 8$  están en forma logarítmica. De la misma manera,  $4 = \log_3 81$  puede ser escrita de forma exponencial como  $3^4 = 81$ .

La idea de los logaritmos fue establecida en el siglo 16 y normalmente se le atribuye a un matemático escocés conocido como John Napier, pero, otra cantidad de personas ayudaron en su desarrollo. Al principio, los logaritmos eran usados extensamente para llevar a cabo cálculos largos y tediosos; éstos ya no son importantes para este propósito porque las calculadoras llevan a cabo estas operaciones con facilidad. Sin embargo, como verás más adelante, los logaritmos tienen muchas otras aplicaciones importantes. Si no fuera así, ¿por qué tu calculadora tiene de todos modos una tecla de LOG.

Si tú encuentras que al principio es confuso trabajar con logaritmos, es útil pensar primero en lo que significan los símbolos en palabras y, luego, trabajar las matemáticas. La Figura 2.19 muestra cómo puedes combinar el uso de las palabras y las matemáticas para ayudarte a evaluar los logaritmos.

### Términos

La palabra *logaritmo* viene de dos palabras griegas, *logos*, que significa proporción y *arithmos*, que significa número.

Log	¿Cómo leerlo?	Significado en palabras	Valor
$\log_{10} 1000$	Log a la base 10 de 1000, o Log de 1000 a base 10	Exponente de base 10 para igualar 1000	$\log_{10} 1000 = 3$
$\log_2 16$	Log a la base 2 de 16	Exponente de base 2 para igualar 16	$\log_2 16 = 4$
$\log_3 9$	Log a la base 3 de 9	Exponente de base 3 para igualar 9	$\log_3 9 = 2$
$\log_4 \frac{1}{16}$	Log a la base 4 de $\frac{1}{16}$	Exponente de base 4 para igualar $\frac{1}{16}$	$\log_4 \frac{1}{16} = -2$

Figura 2.19



PHOTO

**Escribe dos funciones logarítmicas que tengan valores exactos.**

**Datos a conocer:** Los logaritmos pueden tener cualquier número positivo como base, excepto 1, pero, una base de 10 y una base de  $e$  son las usadas más a menudo.

- En tu calculadora, si tú ves la palabra LOG, significa que se usa una base de 10. A estos se les conoce como *logs comunes*.
- Si tú ves las letras LN en tu calculadora, significa que la base  $e$  está siendo utilizada. A estos se les conoce como *logs naturales*.

**1. Usa tu calculadora para evaluar  $\log 100$  y  $\ln 2.718$ .  
¿Obtuviste lo que esperabas? Ahora usa la tecla de  $e^x$  para evaluar  $e^1$  y, luego, encuentra el log natural (LN) del resultado. Explica.**



**2. Usa tu calculadora para evaluar**

- (a)  $\log_{10} 34$
- (b)  $\log_e 10$
- (c)  $\log_{10} 128$
- (d)  $\log 67$
- (e)  $\ln 19$

Cada vez que usamos la palabra *log*, se entiende que se va a usar la base 10. Por ejemplo,  $\log_{10} 100$  sería escrita como  $\log 100$ , la cuál tiene un valor de 2.

Hasta ahora hemos usado la calculadora para encontrar el logaritmo de los números mayores que 1, sin embargo, algunas veces es necesario encontrar el logaritmo de una fracción o un decimal. Consideremos lo que sería  $\log 0.25$ . Si  $\log 1 = 0$  y  $\log \frac{1}{10} = -1$  (10 es igual a cuál exponente,  $\frac{1}{10}$  ó  $10^{-1}$ ). El  $\log 0.25$  debería encontrarse en algún lugar entre 0 y  $-1$ . La calculadora nos da el resultado  $\log 0.25 = -0.6020599913$ , exacto a 10 lugares decimales. Comprueba este valor evaluando  $10^{-0.6020599913}$ .



**1. Copia la Figura 2.20. Usa tu calculadora para completarla.**

Número $N$	Estimado para $\log N$	$\log N$ de la calculadora

Figura 2.20

**2. Explica por qué al tratar de evaluar  $\log (-3)$  en la calculadora da un mensaje de error. ¿Por qué este resultado tiene sentido?**

**Dato a conocer:** Los logaritmos son definidos para números positivos solamente.

**Conjunto de ejercicios: 2.7**

1. Haz una gráfica de  $y = \log_{10} x$  y  $y = \ln x$  en tu calculadora. Posiciona WINDOW de manera que  $-3 \leq x \leq 10$  y  $-5 \leq y \leq 5$ . Dibuja una caja ZOOM con la esquina superior izquierda cerca a  $(-1, 2)$  y la esquina inferior derecha cerca a  $(3, -4)$ . Enfoca en primer plano.
  - (a) ¿De qué maneras son ambas curvas parecidas?
  - (b) ¿Qué punto éstas tienen en común?
  - (c) ¿Cuál curva está aumentando más rápidamente?
  - (d) ¿Cuál es el dominio para cada función?

- (e) ¿Cuál es el alcance para cada función?
2. Haz una gráfica de  $y = \frac{\log_{10} x}{\ln x}$ . Explica lo que notas.
3. (a) Muestra que  $\log_5 17 \approx 1.760374428$ .  
(b) Muestra que  $\log_3 2 \approx 0.6309297536$ .  
(c) Muestra que  $\log_8 145 \approx 2.39330303$ .
4. (a) Usa tu calculadora para encontrar  $\log_{10} 7$ .  
(b) Usa tu calculadora para encontrar  $\log_{10} 3$ .  
(c) Evalúa  $\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3}$  y llama la respuesta  $x$ .  
(d) Usa la respuesta de (c) y evalúa  $3^x$ . ¿Qué representa la  $x$ ?  
(e) De este resultado, conjetura cómo encontrar un logaritmo para cualquier base en tu calculadora.  
(f) Evalúa  $\log_4 12$ . Verifica tu resultado.

