2.8 Las propiedades de los logaritmos

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Transformar el log de un producto en una suma

Transformar el log de un cociente en una diferencia

Transformar el log de una potencia a un producto de un número y un log.

Los logaritmos tienen propiedades interesantes que los hacen útiles. Por ejemplo, cuando se hacen gráficas de algunas curvas complejas usando logaritmos, las curvas se tornan más manejables. En esta sección vas a ser capaz de descubrir éstas por ti mismo usando tu calculadora para buscar patrones.

Haz una gráfica igual a la de la Figura 2.21 en tu cuaderno de notas, y usa tu calculadora para completarla. No es necesario que utilices los mismos dos factores que tus compañeros de clase. Para que el patrón sea útil, debe ser independiente de cuáles números selecciones para tus factores.

Producto	**Log del producto**	**Log del primer factor**	**Log del segundo factor**

Figura 2.21

¿Qué parece ser cierto de log ($a \cdot b$)?

Parece que el log de un producto es igual a la suma de los logs de los factores. En otras palabras,

log ($a \cdot b$) = log a + log b, donde $a > 0$ y $b > 0$

¿Por qué tiene sentido que el log del producto de dos números es igual a la suma de los logs de los números?

La próxima propiedad importante de los logaritmos envuelve la división.

1. **Antes de comenzar, haz una conjetura sobre lo qué piensas qué puede ser igual a la expresión log $\frac{a}{b}$, donde $a > 0$ y $b > 0$.**

Cociente	**Log del cociente**	**Log del numerador**	**Log del denominador**

Figura 2.22

2. **Ahora usa una gráfica como la de la Figura 2.22 para establecer a qué es igual el log $\frac{a}{b}$.**

3. **¿Era correcta tu conjetura?**

Parece que el log del cociente $\frac{a}{b}$ donde $a > 0$ y $b > 0$ es igual a la diferencia de sus logs. Esto es,

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

¿Por qué tiene sentido que el log del cociente de dos números es igual a la diferencia de sus logs?

La última propiedad importante de los logaritmos tiene que ver con el log de una potencia.

1. **Haz una conjetura sobre el valor de un log de una potencia, por ejemplo, log 5^2.**

Potencia	Log de la potencia	Log de la base	Exponente

Figura 2.23

2. **Ahora, usa una tabla como la de la Figura 2.23 para encontrar a qué es igual el log a^n, donde a > 0.**
3. **¿Fue correcta tu conjetura?**

Parece que el log de una potencia es igual al exponente multiplicado por el log de la base. En otras palabras

$$\log a^n = n \cdot \log a,\ a > 0$$

¿Por qué tiene sentido que tú debas multiplicar el exponente y el log?

Tres datos a conocer:

- $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$, donde $a > 0$ y $b > 0$
- $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, donde $a > 0$ y $b > 0$
- $\log a^n = n \cdot \log a$, donde a > 0

Son estas tres propiedades de logaritmos las que las hacen útiles, y debido a que son verdaderas para todos los logaritmos, son ejemplos de leyes matemáticas.

Conjunto de ejercicios: 2.8

1. Evalúa cada una de las siguientes sin utilizar una calculadora.

(a) $\log 2.5 + \log 4$

(b) $\log 50 - \log 5$

(c) $2 \log 20 + \log 2.5$

(d) $\log (27) + \log (0.54) - \log (0.1458)$

2. Encuentra el valor de x si $\log (x - 1) + \log (x + 1) = \log 1$.

3. Hemos mostrado que el $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$, $a > 0$ y $b > 0$. ¿Es esto otro ejemplo de una ley distributiva? Explica.

4. **(a)** ¿Es la declaración $\log (a + b) = \log a + \log b$, $a > 0$ y $b > 0$, una ley matemática?

(b) ¿Es $\log (1.5 + 3) = \log 1.5 + \log 3$? Acuérdate de hacer primero las operaciones en los paréntesis.

(c) ¿Es $\log (2 + 3) = \log 2 + \log 3$?

(d) ¿Qué condiciones se les podría poner a a y b, $a > 0$ y $b > 0$, de manera que $\log (a + b) = \log a + \log b$ sea cierto? ¿Hace esto una declaración útil? Explica.

5. **(a)** ¿Es la declaración $\log (a - b) = \log a - \log b$, $a > 0$ y $b > 0$, una ley matemática? Si es así, ¿por qué? Si no es así, ¿por qué no?

(b) ¿Es $\log (4 - 2) = \log 4 - \log 2$? Explica.

(c) ¿Es $\log (6 - 2) = \log 6 - \log 2$? Explica.

(d) ¿Qué condiciones se les podría poner a a y b, $a > 0$ y $b > 0$, de manera que el $\log (a - b) = \log a - \log b$ sea cierto? ¿Hace esto una declaración útil? Explica.