

2.9 Utilizando logaritmos para el análisis de datos

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Usar logaritmos para ayudar a analizar datos

Establecer si los datos representan una función de potencia o una función exponencial

Establecer funciones exponenciales para que se ajusten a datos dados.

Establecer funciones de potencia para que se ajusten a datos dados.

Una de las cosas que hace útiles a los logaritmos, es que los logaritmos nos permiten trabajar con números muy grandes y muy pequeños de una manera más manejable. Anteriormente, en la primera sección de este capítulo, estableciste cuánto arroz se podría poner en el tablero de ajedrez, si la cantidad de granos se duplicara cada vez. Cuando cada cuadrado era considerado, la cantidad total de granos de arroz en el tablero de ajedrez resultó ser

$$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$$

Cuando tratamos de dibujar una gráfica de la función $y = 2^x - 1$, sólo una pequeña porción de la curva era visible, aún cuando el tamaño de WINDOW fue ajustado de manera que $0 \leq x \leq 20$ y $0 \leq y \leq 1000$. Nota que WINDOW para y es tan grande, que la curva aparenta intersectar el eje de x entre $x = 4$ y $x = 5$.



Figura 2.24

Como encontramos anteriormente, la gráfica de $y = 2^x - 1$ aumenta tan rápido, que muy poco de ella es visible, aún cuando el eje de x está a una escala que llega tan alto como 100,000. Veamos si podemos usar logaritmos para resolver este problema.



En este ejercicio usaremos una versión simplificada de la función exponencial $y = 2^x$ que fue derivada en el problema del tablero de ajedrez.

- 1. Copia la Figura 2.25 y complétala de una de dos maneras; calculando los valores individualmente, o utilizando la función TABLE (Tabla) de tu calculadora. Las primeras dos columnas de números nos dan los pares ordenados que producirán la gráfica en la Figura 2.26.**

Las segundas dos columnas son los valores de x y $\log y$. La decisión de usar logs en el valor y y no en el x fue tomada porque y es el valor que se vuelve incontrolablemente grande.

2. Cuando hayas completado la gráfica, trama los pares ordenados $(x, \log 2^x)$.
3. Ahora, usa tu calculadora para hacer una gráfica de la función $y = \log(2^x)$. Posiciona WINDOW de manera que el dominio sea $1 \leq x \leq 64$ y el alcance sea $0 \leq y \leq 20$.

Nota que el alcance para la función $y = 2^x$ sería $0 \leq y \leq 18,446,744,073,709,551,616$, de manera que esto es una mejoría definitiva.

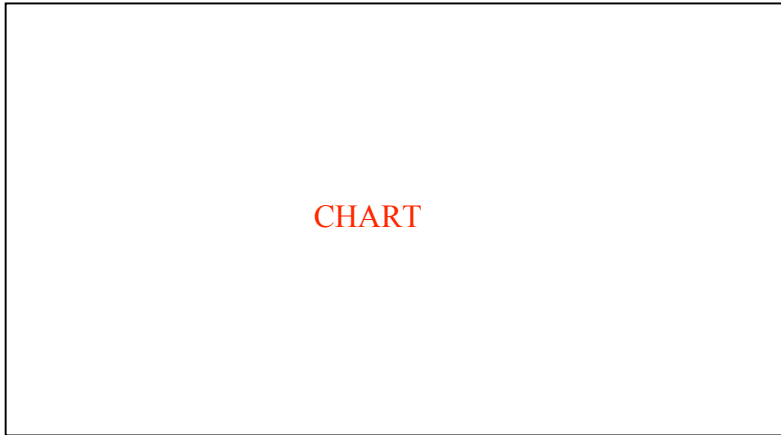


Figura 2.25

La gráfica de $y = \log(2^x)$ se debe parecer a la gráfica de la Figura 2.26.

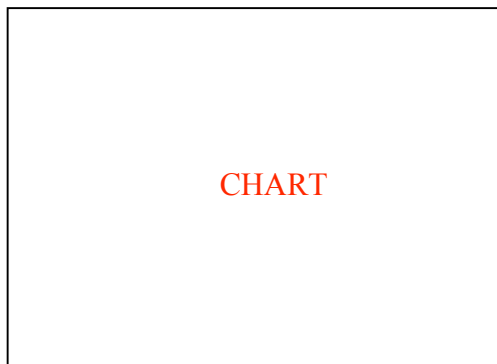


Figura 2.26

¿De qué maneras es esta gráfica de $y = \log(2^x)$ parecida o diferente de la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$?

En la Figura 2.27 está dada una gráfica más detallada que muestra cómo estos puntos de datos fueron tramados.

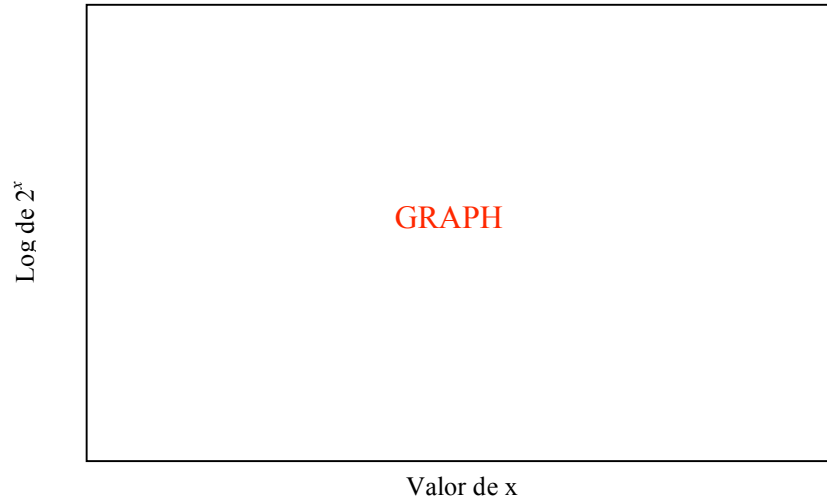


Figura 2.27

Una de las ventajas de tener una gráfica que es una línea recta, es que podemos usar todas las cosas que hemos aprendido acerca de las líneas rectas y sus ecuaciones. Por ejemplo, sabemos que una línea recta no paralela al eje de x tiene la ecuación $y = mx + b$, donde m es la inclinación y b es la intersección de y . En este caso el intersección de y es 0, así que la ecuación de esta línea es en la forma de $y = mx$. Recuerda que la inclinación de una línea recta es la proporción

$$\text{inclinación} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

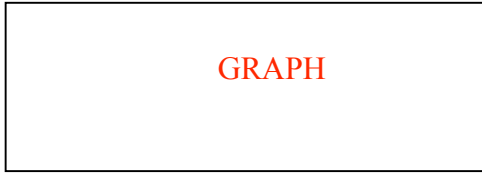
Usemos valores de la gráfica, digamos, $(0, 0)$ y $(30, 9.03)$. La inclinación está dada por

$$\frac{9.03 - 0}{30 - 0} = 0.3010$$

Para establecer lo que este número significa, considera la ecuación original $y = 2^x$. Toma el log de cada lado de la ecuación

$$\log(y) = \log(2^x) = x \log 2$$

porque el $\log(a^n) = n \cdot \log a$. Así que terminamos con la ecuación $\log y = (\log 2)x$, la cuál está en la forma de $y = mx$.



1. Usa tu calculadora para encontrar el log 2. ¿Está de acuerdo con tu cálculo de la inclinación?
2. Usa la función TRACE en tu calculadora para encontrar otros dos puntos en la línea de la gráfica que hiciste antes, y úsalos para encontrar la inclinación. ¿Está de acuerdo con los valores mostrados arriba?



Esto significa que si tenemos una función de crecimiento de la forma $y = y_0 a^{kx}$, podemos cambiar la apariencia de la gráfica de la función, tramando el $\log y$ en contra de x , en vez de y en contra de x , y usa entonces, nuestro conocimiento de las líneas rectas para trabajar con la función. Anteriormente en **MATH Connections** aprendiste como colocar una línea a los datos. Ahora puedes usar esta técnica para colocar una curva exponencial a los datos, porque puedes hacer todos los ajustes con la línea recta, y entonces, convertirlo todo de nuevo a la forma exponencial.

Recuerda que la relación entre el área de un círculo y su radio está dado por $A = \pi r^2$. Asumamos por el momento que no conocemos esta fórmula y que queremos establecer la relación de algunos datos que nos han sido provistos. Los datos siguientes relacionan el área de un círculo y a su radio x . Usa estos datos para determinar esta relación.

Sugerencia

Utiliza principios con resultados conocidos.

Al tratar de establecer una manera nueva de hacer algo matemáticamente, es de utilidad usar los principios que tú estableces en un problema con un resultado conocido porque esto te permite verificar si tú lógica produce la contestación correcta.

Radio (x)	Área del círculo (y)

Figura 2.28



1. **Dibuja una gráfica de estos datos.**
2. **¿Qué tipo de curva se produce?**
3. **¿Es ésta una curva exponencial? Explica.**
4. **Si quisiéramos verificar si ésta es exponencial, ¿cómo se podría hacer esto?**

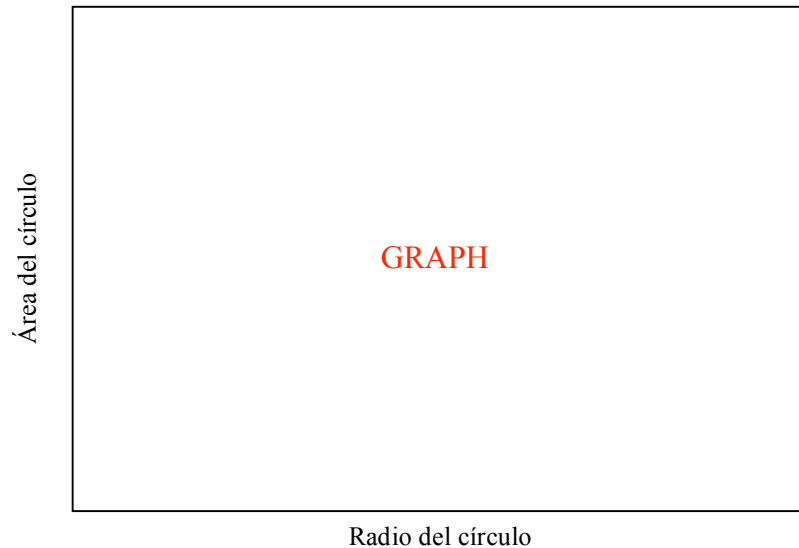


Figura 2.29

Al final, esta curva (Figura 2.29) no es una curva exponencial. Hubiéramos resuelto esto haciendo una gráfica del log (área) en contra del radio. Cuando la gráfica no era una línea recta, sabríamos que la función no era exponencial.



Haz una gráfica igual a la de la Figura 2.30 en tu cuaderno de notas y complétala. Entonces, dibuja una gráfica de los pares ordenados (log [radio], log [área]).

Log (radio)	Log (área)

Figura 2.30

La gráfica que dibujaste debe parecerse a la de la Figura 2.31. Debido a que la gráfica es ahora una línea recta, es mucho más fácil para analizar.

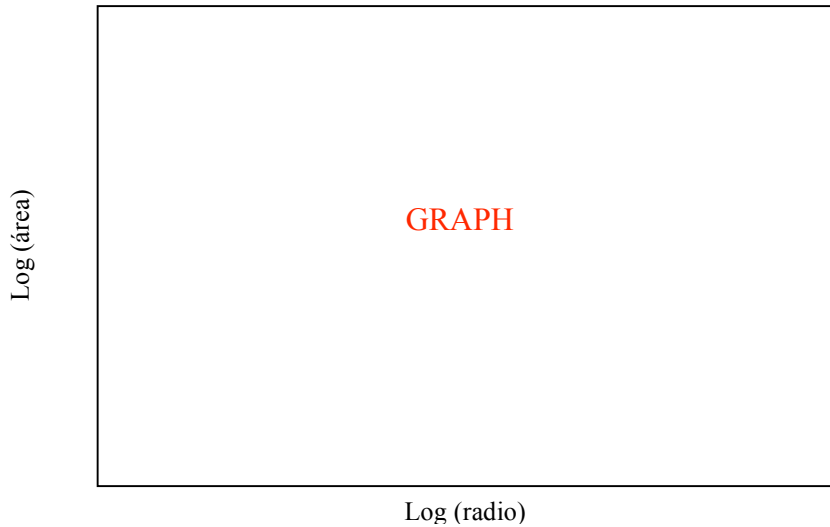


Figura 2.31

La inclinación de esta línea puede ser calculada desde cualesquiera dos puntos, digamos, (0, 0.4969) y (0.8451, 2.187). Estos puntos dan la inclinación

$$\frac{2.187 - 0.4969}{0.8451 - 0} = 2.000$$

El intercepto de y es 0.4969.

Para calcular lo que significan estos valores, observa la ecuación original $A = \pi r^2$. Si tomamos el log de cada lado de esta ecuación, tendremos $\log(A) = \log(\pi r^2)$.

Si aplicamos las dos propiedades de los logaritmos que estudiamos anteriormente, $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ y $\log(a^n) = n \cdot \log a$, a la ecuación $\log A = \log(\pi r^2)$, tendremos

$$\log A = \log \pi + \log r^2 = 2 \cdot \log r + \log \pi$$

Compara esto con la ecuación de la línea recta $y = mx + b$ y nota que en este caso

$\log \text{ area} = \text{area de log}$	$\log \text{ radius} = \text{radio de log}$
--	---

En otras palabras, la inclinación de la gráfica nos dice que el exponente y el intercepto de y , nos dice el log del factor multiplicado por la potencia. Si el intercepto de y es $\log \pi$, entonces, si calculamos $10^{0.4969}$ debemos obtener π . Verificalo en tu calculadora. Este método funcionará en cualquier ecuación de la forma $y = k \cdot x^n$, conocido algunas veces como una *función de potencia*. Nota que la variable aquí es x , no n , así que esto no es una función exponencial. Si tenemos datos que sospechamos puedan ser una función exponencial, podemos usar el método de hacer gráficas de ambas x y y , para encontrar el exponente (la inclinación de la línea) y el factor multiplicado por la potencia (10 elevado al valor del intercepto y).

1. ¿Qué significaría si tú hicieras una gráfica $\log x$ versus $\log y$ y no obtuvieras una línea recta?
2. ¿Qué significaría si tú hicieras una gráfica de x versus $\log y$ y no obtuvieras una línea recta?



1. Usa tu calculadora para hacer una gráfica de la función $y = \log(2^x - 1)$ para $0 \leq x \leq 100$ y $-10 \leq y \leq 40$.
2. ¿Obtuviste una línea recta?
3. Acércate a un punto tan cerca como sea posible a (3, 2). Explica.

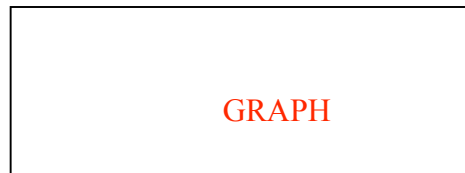
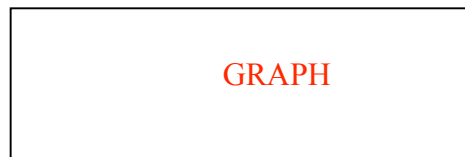


Figura 2.32

La primera gráfica se debe parecer a la gráfica de la Figura 2.32. Después de enfocar varias veces, la gráfica se debe parecer a la gráfica de la Figura 2.33. Está claro que la gráfica no es lineal, aunque se aproxima a una función lineal para valores grandes de x .



$$x = 3.4526316, y = 1.9642857$$

Figura 2.33

Este último ejemplo ilustra por qué debes tener cuidado al utilizar una calculadora para producir gráficas. Es prudente siempre explorar un poco antes de llegar a conclusiones precipitadas.

- (a) Asumiendo que estos datos representan una función de crecimiento de la forma $y = y_0e^{kt}$, establece la ecuación que describe la relación funcional.
- (b) Haz una gráfica de los datos originales y la función para verificar que los datos se ajustan a la función.

2. Un péndulo consiste de una pelota de metal pesado amarrada al extremo de una cuerda. Cuando la masa es atraída hacia el lado y soltada, el péndulo oscilará de un lado a otro. Sean notó que los péndulos con cuerdas cortas parecen moverse de un lado a otro más rápido que aquellos con cuerdas más largas. Él toma el tiempo de cuánto le toma a la masa moverse de un lado a otro para una variedad de péndulos diferentes y anota sus hallazgos en una tabla.

Longitud de la cuerda en metros (l)	Tiempo que toma una oscilación en segundos (T)

- (a) Asumiendo que estos datos representan una función de potencia de la forma $T = kl^n$, establece la ecuación que describe la relación funcional.
 - (b) Haz una gráfica con los datos originales y la ecuación para verificar que los datos se ajustan a la función.
3. La tabla siguiente nos proporciona la distancia (en metros) a la que un objeto en caída libre viaja en varios tiempos (en segundos) después que se le deja caer.

Tiempo en segundos después de soltado (t)	Distancia viajada en metros (d)

- (a) Establece una ecuación que represente la relación funcional entre las variables t y d .
 - (b) Haz una gráfica con los datos originales y la ecuación para verificar que los datos se ajustan a la función.
4. En el siglo 17, Johannes Kepler estableció una ley muy famosa sobre el movimiento de los planetas. Este conocimiento es esencial cuando los satélites de comunicaciones son puestos en órbita alrededor de la Tierra. Kepler derivó su ley mirando el tiempo que le tomó a varios planetas completar una revolución alrededor del Sol y comparando este tiempo con la distancia del Sol a los planetas. Sus datos, al igual que los datos recogidos más recientemente, están dados en la tabla de abajo.

Planeta	Distancia del Sol en millones de kilómetros (R)	Cantidad de días de la Tierra en dar una vuelta al Sol (T)
Mercurio	58	88
Venus	108	225
Tierra	150	365
Marte	228	687
Júpiter	778	4329
Saturno	1427	10,753
Urano	2870	30,660
Neptuno	4497	60,150
Plutón	5907	90,670



- (a) Establece una ecuación que represente la relación funcional entre las variables R y T .
- (b) Haz una gráfica con los datos originales y la ecuación de la función de (a) para verificar que los datos se ajustan a la función.

PROYECTO

Una manera de demostrar el declive exponencial es conduciendo un experimento. Coge una lata de gaseosa vacía y llénala con agua del grifo caliente. Pon un termómetro en la lata vacía y déjala reposar a temperatura ambiente. Anota la *diferencia* entre la temperatura del agua y la temperatura de la habitación cada dos minutos durante los primeros diez minutos, y entonces, después, cada cinco minutos hasta que el agua en la lata esté, esencialmente, a la misma temperatura que el aire en la habitación.

- (a) Haz una gráfica de los datos usando el tiempo que le toma al agua enfriarse como la variable independiente en el eje de x . Dibuja una línea suave a través de los puntos.
- (b) Otra manera de declarar la fórmula para la Ley de Enfriamiento de Newton es $T - T_0 = Ae^{kt}$, donde T es la temperatura en un momento determinado, T_0 es la temperatura de la habitación (asumiendo que sea constante), A es la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura de la habitación cuando comienza el enfriamiento, y k es la constante de enfriamiento para la habitación.
- (c) Prepara una tabla de valores de t y $\ln[T - T_0]$. Haz una gráfica con estos datos con t en el eje de x .
- (d) Usa la gráfica de (b) para establecer el valor de la constante de enfriamiento k para tu salón de clases.
- (e) Sustituye los valores que conoces para T_0 , A y k en la fórmula original. Haz una gráfica de esta curva. ¿Pasa ésta a través de tus puntos de datos?
- (f) ¿Qué tú esperas que ocurra si colocas esta misma lata vacía en un sauna a 100°F ?

